Задание № 15 Прямая в пространстве

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**Прямые линии в пространстве**

Прямую можно рассматривать как пересечение двух плоскостей и поэтому задавать системой уравнений:



Определение: любой вектор, параллельный некоторой прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Пусть некоторая прямая  с направляющим вектором  проходит через точку . Некоторая точка будет принадлежать прямой  тогда и только тогда,

когда векторы  и  коллинеарны. Условие коллинеарности этих векторов: . Эти уравнения называются каноническими уравнениями прямой.

Полагая , получим параметрические уравнения прямой:



*Пример 1:* Составить уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки , .

*Решение*: точка  будет лежать на прямой тогда и только тогда, когда векторы  и  коллинеарны. Поэтому условие коллинеарности будет являться уравнением прямой, проходящей через 2 точки:



*Пример 2:* Найти угол между прямыми  и .

*Решение:* угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, поэтому



**Основные задачи для прямых в пространстве**

Большинство математических и прикладных задач для прямой в пространстве решается при совместном использовании решений следующих основных задач:

1. Приведение общих уравнений прямой как линии пересечения двух плоскостей к канонической или параметрической форме.

*Решение:* для составления канонических и параметрических уравнений прямой нужно знать ее направляющий вектор и координаты какой-либо точки, лежащей на прямой. Координаты точки найдем как любое частное решение СЛАУ

****

Нетрудно понять, что направляющий вектор прямой перпендикулярен каждому из нормальных векторов плоскостей, задающих эту прямую. Поэтому, в качестве направляющего вектора можно взять векторное произведение нормальных векторов плоскостей.

*Пример1:* найти канонические и параметрические уравнения прямой как линии пересечения плоскостей

.

*Решение:* нормальные векторы плоскостей равны соответственно  и . В качестве направляющего вектора прямой можно взять

.

В системе  полагаем, например, :

*Замечание:* прямая обязательно пересекает хотя бы одну координатную плоскость. Здесь мы приняли, что это – плоскость .

Если полученная СЛАУ не будет иметь решений, то вместо  надо будет взять  или .

.

; .

Значит, канонические уравнения прямой имеют вид

,

а параметрические - .

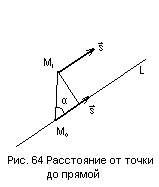
2. Определение угла между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

*Решение:* угол между прямыми равен углу между направляющими векторами.

3. Определение расстояния от точки до прямой

Пусть дано каноническое уравнение прямой 

 и точка .

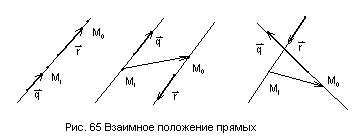
Направляющий вектор  прямой можно параллельно перенести так, что его начало совпадет с точкой  (рис. 64). Тогда расстояние от точки до прямой определяется из прямоугольного треугольника: , значит,

**.**

4. Определение взаимного положения двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве могут либо совпадать, либо быть параллельными, либо пересекаться, либо скрещиваться.

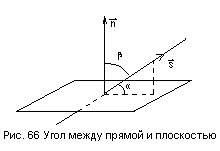
Рассмотрим уравнения двух прямых  и . Пусть , , ,

На рис. 65 приведены случаи совпадения, параллельности и пересечения прямых.

1. Прямые совпадают тогда и только тогда, когда векторы  коллинеарны.
2. Прямые параллельны тогда и только тогда, когда векторы  коллинеарны, а вектор  им не коллинеарен
3. Прямые пересекаются тогда и только тогда, когда векторы  компланарны, а векторы  не коллинеарны
4. Прямые скрещиваются тогда и только тогда, когда векторы  не компланарны.

**Основные задачи для прямой и плоскости в пространстве**

1. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть дана прямая  и плоскость .

*Решение*: Пусть  - искомый угол между прямой и плоскостью,  - угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости, тогда  и .

Значит, .

Условие параллельности: . Условие перпендикулярности: .

2. Определение взаимного положения прямой и плоскости в пространстве.

Прямая может пересекать плоскость, лежать в этой плоскости или быть ей параллельной. Определить взаимное положение прямой и плоскости можно, рассмотрев систему, состоящую из уравнения плоскости и уравнений прямой: если система имеет единственное решение – прямая и плоскость пересекаются в единственной точке; если система имеет бесконечно много решений – прямая лежит в плоскости; если система не имеет решений – плоскость и прямая параллельны.

Можно привести и менее громоздкий способ определения взаимного положения прямой и плоскости:

1. Прямая  и плоскость пересекаются тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости не перпендикулярны: .
2. Прямая лежит в плоскости тогда и только тогда, когда  и .
3. Прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда  и .
4. Прямая перпендикулярна плоскости, если 

3. Определение точки пересечения прямой и плоскости

Если известно, что прямая и плоскость пересекаются , то найти координаты их точки пересечения можно решив систему, состоящую из уравнения плоскости и уравнений прямой.

***Пример1:*** Установить взаимное положение прямых

 и ;

*Решение:* Направляющий вектор первой прямой - , второй - . Точка  лежит на первой прямой, точка  - на второй, . Векторы  и  не коллинеарны, значит, прямые не совпадают и не параллельны. Проверим компланарность векторов ,  и : , значит, прямые скрещиваются.

***Пример2:*** Найти расстояние между прямыми  и ;

*Решение:* проведем через точку , лежащую на первой прямой, прямую , параллельную второй прямой. Вектор , являющийся направляющим для второй прямой будет направляющим и для прямой . Построим на векторах ,  и  параллелепипед. Длина высоты этого параллелепипеда равна искомому расстоянию. Объем  параллелепипеда равен произведению площади основания  на высоту : . С другой стороны, объем  равен смешанному произведению векторов ,  и , а площадь основания – модулю векторного произведения  и , значит,

.

; ;

; .

**Самостоятельная работа:**

**4.3.1.** Даны общие уравнения прямой в пространстве ;

а) составить канонические уравнения этой прямой;

б) составить параметрические уравнения этой прямой;

в) определить, пересекается ли данная прямая с плоскостью

;

**4.3.2.** Даны канонические уравнения прямой ;

а) составить какие-нибудь общие уравнения этой прямой;

б) составить параметрические уравнения этой прямой;

**4.3.3.** Даны параметрические уравнения прямой в пространстве:

, , ;

а) составить общие уравнения этой прямой;

б) составить канонические уравнения этой прямой;

**4.3.4.** Составить канонические уравнения прямой в пространстве, если:

а) прямая проходит через точку  перпендикулярно плоскости ;

б) прямая проходит через точку  перпендикулярно векторам  и

;

в) прямая проходит через точки  и ;

**4.3.5.** Установить взаимное положение

а) плоскости  и прямой ;

б) плоскости  и прямой ;

**4.3.6.** Установить взаимное положение прямых

а)  и ;

б)  и ;

в)  и ;

г)  и ;

**4.3.7.** Найти косинус угла:

а) между плоскостями  и ;

б) между прямыми  и ;

в) между прямой  и плоскостью ;

**4.3.8.** Найти расстояние между прямыми

 и ;

**4.3.9.** Найти расстояние от точки  до прямой .

**Ответы:**

**4.3.1.** а) для одной и той же прямой можно составить бесконечно много различных канонических уравнений. В качестве направляющего вектора прямой можно взять векторное произведение нормальных векторов плоскостей: . В качестве точки, лежащей на прямой можно взять любое частное решение системы , например, . Тогда получим канонические уравнения ;

б) Полагая , получим , , ;

в) составим систему линейных уравнений: .

Если ее определитель не равен нулю, то плоскость и прямая пересекаются. . Прямая и плоскость пересекаются.

**4.3.2.** а) самый простой способ составить общие уравнения – рассмотреть отдельно каждое из двух равенств и раскрыть пропорции:  ;

б) ;

**4.3.3.** а) например, ;б) ;

**4.3.4.** а) ; б) ; в) ;

**4.3.5.** а) плоскость и прямая пересекаются; б) плоскость и прямая параллельны;

**4.3.6.** а) прямые параллельны; б) прямые совпадают; в) прямые скрещиваются;

г) прямые скрещиваются;

**4.3.7.** а) ; б) ; в) ; **4.3.8.**  ; **4.3.9.** ;